17-12-19

Θεώρημα: Έστω $f: K \to \mathbb{R}$ συνεχής $K = [\alpha, b] \times [\gamma, \delta] \subseteq \mathbb{R}^2$. Τότε $\forall\, \theta \in [\alpha, b)$, $\forall\, \xi \in (\gamma, \delta)$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

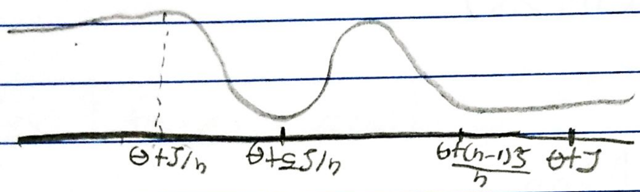
$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y(\theta) = \xi \end{array}\right\}$$

έχει μια λύση ορισμένη στο $[\theta, \theta+\eta]$ για κάποιο $\eta > 0$.

Απόδειξη: $\exists M > 0 : |f(x,y)| \leq M \;\; \forall\, x, y \in K$

Θέτουμε $\eta = \min\{(\xi+\gamma)/M, (\delta - \xi)/M, \beta - \theta\}$

$$y_n(x) = \begin{cases} \xi & \theta \leq x \leq (\theta + \xi)/n \\ \xi + \int_\theta^{x - \xi/n} f(s, y_n(s))\, ds & \theta + \eta/n \leq \theta + \eta \end{cases}$$



Ορίζουμε: επαγωγικά την y_n στα διαστήματα $\left[\theta + \frac{k\eta}{n}, \theta + \frac{(k+1)\eta}{n}\right]$ όπου $k = 1, \dots, n-1$.

Άρα η συνάρτηση $\boxed{y_n(x)}$ είναι καλά ορισμένη

Με επαγωγή στο n: $y_n(x) \in [\gamma, \delta] \;\; \forall\, x \in [\theta, \theta + \eta]$

Για $x \in [\theta + \eta/n, \theta + 2\eta/n]$: $\boxed{\forall s \in [\theta, x - \frac{\eta}{n}]} \Longrightarrow$ $\Rightarrow s \in [\theta, \theta + \eta/n]$

$$y_n(s) = \xi$$

$$y_n(x) = \int_\theta^{x - \xi/n} f(s, y_n(s))\, ds + \xi$$

- Έστω $x_1, x_2 \in [\theta, \theta + \eta] \Rightarrow$

$$\Rightarrow |y_n(x_1) - y_n(x_2)| = \left| \int_\theta^{x_1 - \xi/n} f(s, y_n(s))\, ds - \int_\theta^{x_2 - \xi/n} f(s, y_n(s))\, ds \right|$$

$$= \left| \int_{x_2 - \xi/n}^{x_1 - \xi/n} f(s, y_n(s))\, ds \right| \leq M \left| x_1 - \frac{\xi}{n} + x_2 + \frac{\xi}{n} \right| = M |x_1 - x_2|$$

- Έστω $x_1, x_2 \in [\theta, \theta + \eta/n]$: $|y_n(x_1) - y_n(x_2)| = 0$
- Έστω $x_1 \in [\theta, \theta + \eta/n]$, $x_2 \in [\theta + \eta/n, \theta + \eta]$: $\boxed{|y_n(x_1) - y_n(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|}$

Διότι: $|y_n(x_1) - y_n(x_2)| = \left| \int_{\theta}^{x_2 - 2/n} f(s, y_n(s))\, ds \right| \leq M |x_2 - 2/n - \theta|$

$\leq M |x_2 - x_1| \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in [\theta, \theta+2] : \forall n \in \mathbb{N}, |y_n(x_1) - y_n(x_2)| \leq M |x_1 - x_2|$

ΟΡΙΣΜΟΣ: $\{y_n\}$ ισοσυνεχής αν $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in [\theta, \theta+2]\ \exists r_x > 0$ τω $\forall y \in (x - r_x, x + r_x) \cap [\theta, \theta+2]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ να ισχύει:
$|y_n(x) - y_n(y)| < \varepsilon$

Έστω για $x \in [\theta, \theta+2]$, $r_x = \varepsilon / M$ έχουμε:
$\{y_n\}$ ισοσυνεχής και φραγμένη $\Rightarrow \boxed{\exists \{y_{k_n}\}}$ και
$y \in C[\theta, \theta+2]$ τω $\boxed{y_{k_n} \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} y}$

$$y_{k_n}(x) = \xi + \int_{\theta}^{x} f(s, y_{k_n}(s))\, ds - \int_{x - \xi/k_n}^{x} f(s, y_{k_n}(s))\, ds \quad x \in [\theta, \theta+2]$$

$y_{k_n} \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} y \Rightarrow f(s, y_{k_n}(s)) \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f(s, y(s))$ στο $[\theta, \theta+2]$

- Αν $x = \theta \Rightarrow y_{k_n}(x) = \xi \Rightarrow y(\theta) = \xi$
- Αν $\theta + 2 > x > \theta \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n \geq n_0$ $x \in [\theta + 2/n, \theta+2] \Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x) = \lim y_{k_n}(x) = \xi + \int_{\theta}^{x} f(s, y(x))\, dx$$

$$\left| \int_{x - \xi/k_n}^{x} f(s, y_{k_n}(s))\, ds \right| \leq M\left(x - \left(x - \frac{\xi}{k_n}\right)\right) = \frac{M|\xi|}{k_n} \longrightarrow 0$$

$\longleftrightarrow$

ΛΗΜΜΑ: Αν $y_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} y$ στο $[a, b]$, $f : [a, b] \times [\gamma, \delta] \to \mathbb{R}$ συνεχής και $f(x, y_n(x))$ ορίζεται καλώς $\forall x \in [a, b] \Rightarrow$
$\boxed{f(x, y_n(x)) \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f(x, y(x))}$

Απόδειξη

$[a,b]\times[\gamma,\delta]$ συμπαγής $\Rightarrow$ f ομοιόμορφα συνεχής

Άρα $\forall \varepsilon>0, \exists r>0, \forall (x,w), (x',w') \in [a,b]\times[\gamma,\delta]$ τω

$|(x,w)-(x',w')|<r \quad |f(x,w)-f(x',w')|<\varepsilon$

$y_n \xrightarrow{\text{ομοιομ}} y$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω $\forall n\geq n_0 \quad |y_n(x)-y(x)|<\delta \ \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0 \quad |(x,y_n(x))-(x,y(x))| = |y_n(x)-y(x)|<\delta$

$\Rightarrow \forall x\in[a,b], \forall n\geq n_0, : |f(x,y_n(x))-f(x,y(x))|<\varepsilon$

Άσκηση $f_n' \xrightarrow{\text{ομοιομ}} g$ συνεχής στο $[a,b]$, f_n αδεκληρωύσιμη συνεχής $\forall n\in\mathbb{N}$, $\lim f_n(x_0)$ υπάρχει για κάποιο $x_0\in[a,b]$

Νδο $f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ}} f$ σε κάποιο αντιπαράγωγο της g.

Λύση

Θ.Μ.Τ Έστω $x\in[a,b]$ $\exists$ y μεταξύ των x_0, x τω

$f_m(x)-f_n(x) = f_m(x_0)-f_n(x_0)+(x-x_0)(f_m'(y)-f_n'(y))$

$\Rightarrow |f_m(x)-f_n(x)| \leq |f_m(x_0)-f_n(x_0)|+|x-x_0|\,|f_m'(y)-f_n'(y)|$

Όμως $\boxed{f_n' \xrightarrow{\text{ομοιομ}} g}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Αν $\varepsilon>0, \exists n_0\in\mathbb{N}$ τω $\forall m,n\geq n_0 \quad \|f_m'-f_n'\|_\infty<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall n\geq n_0 \quad \forall x\in[a,b] \quad |f_m'(x)-f_n'(x)|<\varepsilon \Rightarrow$

$\forall m,n\geq n_0 \quad |f_m(x)-f_n(x)| \leq |f_m(x_0)-f_n(x_0)|+\varepsilon$

Όμως $\lim f_n(x_0)$ υπάρχει $\Rightarrow \{f_n(x_0)\}$ Cauchy $\Rightarrow$

$\exists n_0' \in\mathbb{N}$ τω $\forall m,n\geq n_0'$: $|f_m(x_0)-f_n(x_0)|<\varepsilon(|x-x_0|+1)$

$<\varepsilon(b-a+1)$

Θέτουμε: $\boxed{n_0'' = \max\{n_0, n_0'\} : \forall m,n \geq n_0'' : |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon(b-a+1) \ \forall x \in [a,b]}$

$\Rightarrow \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon(b-a+1) \quad \forall m,n \geq n_0'' \Rightarrow \{f_n\}$ ομοιόμ. Cauchy

$\Rightarrow \{f_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνεχή $f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$f_n' \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} g \Rightarrow \int_{x_0}^{x} f_n' \longrightarrow \int_{x_0}^{x} g$$

$$\Rightarrow f_n(x) - f_n(x_0) \longrightarrow \int_{x_0}^{x} g$$

$$\Rightarrow f_n(x) \longrightarrow L + \int_{x_0}^{x} g.$$

$\longleftrightarrow$

Ορισμός
Έστω (X, d) συμπαγής, L ένας πραγματικός ~~γραμμικός~~ γραμμικός χώρος συναρτήσεων: $X \to \mathbb{R}$. Θέτουμε:

$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$

Το L λέγεται $\boxed{\text{lattice (πλέγμα)}}$ αν $\forall f, g \in L$ τότε:

1. $f \wedge g \in L$
2. $f \vee g \in L$

ΛΗΜΜΑ Έστω L πραγματικός γραμμικός χώρος συναρτήσεων $: X \to \mathbb{R}$. Τότε L lattice $\Longleftrightarrow \forall f \in L \Rightarrow |f| \in L$

Απόδειξη: $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |b-a|)$

$\min\{a,b\} = \frac{1}{2}(a+b-|b-a|)$

<u>Έστω $f,g \in L$</u>

"⇒" Έστω ότι L lattice $\Rightarrow f\wedge g,\ f\vee g \in L$

$\Rightarrow f\vee g - f\wedge g \in L \Rightarrow |g-f| \in L \xRightarrow{f=0} |g| \in L$

"⇐" Έστω ότι $\forall g \in L : |g| \in L : g-f \in L \Rightarrow |g-f| \in L$

$\Rightarrow f\vee g,\ f\wedge g \in L \Rightarrow L$ lattice

$\longleftrightarrow$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Έστω L μια οικογένεια συναρτήσεων στο X. Η L θα λέμε ότι διαχωρίζει τα στοιχεία του X αν $\forall x,y \in X \ \exists f \in L$ τ.ω. $f(x) \neq f(y)$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> $\mathbb{1} : X \to \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{1}(x) = 1 \quad \forall x \in X$

<u>ΛΗΜΜΑ 1:</u> Έστω L γραμμικός χώρος συναρτήσεων στο X

i) L διαχωρίζει τα στοιχεία του X

ii) $\mathbb{1} \in L$

Τότε: $\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall x,y \in X \ \exists f \in L$ τω $f(x)=a,\ f(y)=b$

<u>Απόδειξη</u>

$\forall x,y \in X \ \exists g \in L$ τω $g(x) \neq g(y)$

<u>Θέτουμε:</u> $c = g(x) - g(y)$

Ορίζω: $f = \frac{(a-b)g + (bg(x) - ag(y))}{c} \in L$

$$\boxed{f(x)} = \frac{(a-b)g(x) + (bg(x) - ag(y))}{g(x) - g(y)} = \boxed{a}$$

Ομοίως $\boxed{f(y) = b}$

ΛΗΜΜΑ 2 (X,d) συμπαγής μ.χ $L \subseteq C(X)$, L lattice, διαχωρίζει τα στοιχεία του X και $\mathbb{1} \in X$. Έστω $g \in C(X)$, $a \in X$, $\varepsilon > 0$.
Τότε $\exists$ $f \in L$ με $f(a) = g(a)$ και $f(x) > g(x) - \varepsilon$ $\forall x \in X$

Απόδειξη

Έστω $x \in X$.

Από ΛΗΜΜΑ 1: $\exists f_x \in L$ τ.ω $f(x) = g(x)$, $f_x(a) = g_x(a)$

Όμως $f_x(x) > g(x) - \varepsilon \overset{\text{συνέχεια}}{\Longrightarrow} \exists r_x > 0 : \forall y \in B_{r_x}:$ $f_x(y) > g(y) - \varepsilon$

$\{B_{r_x}(x) : x \in X\}$ ανοιχτή κάλυψη του X

$\Rightarrow \exists$ $x_1, \ldots, x_n \in X$ τ.ω $X = \bigcup_{i=1}^{n} B_{r_{x_i}}(x_i)$

Θέτουμε: $f = f_{x_1} \vee \ldots \vee f_{x_n} \in L \Rightarrow f(a) = g(a)$

Έστω $x \in X \Rightarrow \exists$ $i \in \{1, \ldots, y\}$ τ.ω $x \in B_{r_{x_i}}(x_i)$

$\Rightarrow f(x) \geq f_{x_i}(x) > g(x) - \varepsilon \Rightarrow f(x) > g(x) - \varepsilon$ $\forall x \in X$